Über die irreduziblen ebenen Kurven von Maximalindex.

Von JULIUS v. SZ. NAGY in Kolozsvár.

1. Einleitung.

Wir verstehen unter einer Kurve eine völlig stetige geschlossene ebene Kurve, die also keinen Winkelpunkt und keine gerade Strecke hat. Die Ordnung bzw. der Index der Kurve ist die grösste bzw. kleinste Anzahl der Punkte, in denen die Kurve von einer Geraden der Ebene getroffen werden kann. Ähnlicherweise lassen sich die Klasse und der Klassenindex der Kurve definieren.[1])

Eine Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex (vom Index $n-2$) ist irreduzibel, wenn sie aus einem Zuge besteht oder wenn sie ihre Züge in zwei Gruppen so einteilen lässt, dass die Summe der Ordnungen der Kurven, die von den Zügen je einer Gruppe gebildet werden, mit der Ordnung der Kurve gleich ist.[2])

Die Anzahl der Doppelpunkte, (unter denen ein einziger Doppelpunkt auch eine Spitze sein kann), für eine Kurve C n-ter Ordnung vom Maximalindex ist

$$d=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-p,$$

wo p das Geschlecht der Kurve C bedeutet.[3])

Das Geschlecht einer Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex ist höchstens $n-2$, sie hat also wenigstens

---

[1]) J. v. Sz. NAGY: „Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex", Math. Ann. Bd. 89 (1923), S. 32—75, Bd. 90 (1923), S. 152—153.

[2]) Math. Ann. Bd. 89 (1923), S. 62—75.

[3]) J. v. Sz. NAGY: „Über die charakteristischen Zahlen einer ebenen Kurve von Maximal-Klassenindex", Math. és Természettud. Értesítő, Budapest Bd. 43 (1926), S. 290—306.

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-(n-2)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

Doppelpunkte. Eine Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex hat also immer Doppelpunkte, sobald $n > 3$ ist.

Ist C_h ein Zug der Kurve C vom Maximalindex, der wenigstens einen Doppelpunkt hat, so wird er von einem Doppelpunkte Q in zwei Pseudozüge zerlegt. Der eine Pseudozug ist der geschlossene Teil von C_h, welcher von einem Punkte P durchlaufen wird, während er von dem Doppelpunkte Q ausgeht und auf C_h zum ersten Male zur Anfangslage Q zurückkehrt. Der andere geschlossene Teil von C_h ist der andere Pseudozug. Hat der eine Pseudozug noch Doppelpunkte, so lässt er sich in weitere Pseudozüge zerlegen. Man kann also den Zug C_h in Pseudozüge ohne Doppelpunkte zerlegen.

Ein Pseudozug ist eine stetige und geschlossene Kurve, er hat aber Winkelpunkte. Ein Pseudozug ist — nach unserer Definition — keine eigentliche Kurve. Die Ordnung eines Pseudozuges ist die maximale Anzahl der Punkte, in denen er von einer Geraden der Ebene getroffen werden kann. Eine Gerade durch einen Winkelpunkt trifft den Pseudozug im Winkelpunkte einfach oder zweifach, je nach dem sie im Winkelpunkte den Pseudozug durchsetzt oder nicht. Wir können die unendlichvielen durch einen Winkelpunkt Q hindurchgehenden Geraden, von denen der Pseudozug in Q nicht geschnitten wird, uneigentliche Tangenten des Pseudozuges in Q nennen.

Ein Pseudozug lässt sich durch *Abrundung*[4]) seiner Winkelpunkte in eine völlig stetige Kurve überführen. Ist AB ein den im Endlichen liegenden Winkelpunkt Q enthaltender genug kleiner Bogen des Pseudozuges, der ausser Q keine Singularität hat, und ersetzt man diesen Bogen durch einen Elementarbogen, der im von dem Bogen AB und von der Strecke AB begrenzten endlichen Gebiete liegt und den Pseudozug in A und B berührt, so rundet man den Winkelpunkt Q ab.

Zerlegt man eine Kurve vom Maximalindex durch Zerschneiden einiger Doppelpunkte in Züge und Pseudozüge ohne Doppelpunkte und rundet man die Winkelpunkte ab, so bilden die erhaltenen

[4]) C. Juel: „Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung", Mém. de l'Académie Royal des Sc. et des Lettres de Danemark, 7. série. Sect. des Sc. t. XI., n⁰ 2 (1914), S. 123—125.

Züge eine Kurve, die im Allgemeinen nicht vom Maximalindex ist. Es gilt aber der folgende Satz:

Eine irreduzible Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlechte p lässt sich durch Zerschneiden gewisser $n-2-p$ ihrer Doppelpunkte in $n-2$ Züge und Pseudozüge dritter und in einen oder in keinen Zug oder Pseudozug zweiter Ordnung zerlegen, von denen auch dann eine irreduzible Kurve n-ter Ordnung und vom Maximalindex gebildet wird, wenn die Winkelpunkte der Pseudozüge entsprechend abgerundet werden.

Dieser Satz wird mit Hilfe einiger Sätze für die irreduziblen Kurven vom Maximal-Klassenindex bewiesen.

2. Über die einzügigen Kurven vom Maximal-Klassenindex.

Auf einer Doppeltangente einer einzügigen Kurve vom Maximal-Klassenindex bestimmen die zwei Berührungspunkte zwei Intervalle. Enthält das eine Intervall ausserhalb seiner Endpunkte keinen Punkt der Kurve und schneidet es die eventuelle Wendetangente der Kurve nicht, so wird dieses Intervall eine *Doppelstrecke* genannt. Aus dieser Definition folgt, dass man aus jedem Punkte einer Doppelstrecke an die Kurve n Tangenten ziehen kann, wenn n die Klasse der Kurve ist.

Auf Grund dieser Definition beweisen wir den folgenden Satz:

Hat eine einzügige Kurve vom Maximal-Klassenindex wenigstens eine Doppeltangente, so hat sie wenigstens auf einer Doppeltangente eine Doppelstrecke.

Für den Beweis dieses Satzes wollen wir zeigen, dass die einzügige Kurve K vom Maximal-Klassenindex, die keine Doppelstrecke hat, überhaupt keine Doppeltangente haben kann.

Wir nehmen erst an, dass die Kurve K wenigstens 3 Spitzen erster Art hat, dass ihre Spitzen alle im Endlichen liegen und dass die Kurve keine Wendetangente hat.

Wir bezeichnen mit $A, B, C, \ldots$ bzw. mit $AB, BC, \ldots$ die aufeinander folgenden Spitzen bzw. Bögen der Kurve K. Ist p_0 die Tangente des Bogens BC in einem dem Punkte B genug nahe liegenden Punkte P_0 und ist Q_0 der dem Punkte B nahe liegende Schnittpunkt des Bogens AB mit p_0, so liegt kein Punkt der Kurve K im Innern der endlichen Strecke P_0Q_0 auf der Tangente p_0 Bewegt sich der Punkt P von P_0 ausgehend auf der Kurve K, so bezeichnen wir den auf der Tangente p von P liegenden Punkt in den der Punkt Q_0 während der Bewegung von P übergeht, mit Q, solange bis dieser Punkt ganz bestimmt bleibt. Dasjenige von P und Q begrenzte Intervall der Tangente p, in das die endliche Strecke P_0Q_0 während der Bewegung des Punktes P übergehen kann, wird im Folgenden mit $|PQ|$ bezeichnet.

Aus den Punkten irgendeines Intervalles $|PQ|$ erreicht man in P und Q die konvexe Seite der Kurve K. Dies folgt daraus, dass eine einzügige Kurve vom Maximal-Klassenindex ohne Wendetangente ihre Ebene in zwei Gebiete T_0 und T_1 zerteilt. Aus den Punkten des Gebietes T_0 bzw. T_1 erreicht man die konkaven bzw. konvexen Seiten der Elementarbögen der Kurve K. Das Intervall $|P_0Q_0|$ liegt also in T_1.

Kein Intervall $|PQ|$ kann im Innern Punkte der Kurve K enthalten, weil sie keine Doppelstrecke hat.

Wäre nämlich $|P_1Q_1|$ in einem Bewegungssinne des Punktes P das erste der Intervalle $|PQ|$, von dem ein Punkt R der Kurve K im Innern enthalten wird, so würde die Kurve von der Tangente p_1 auch im Punkte R zweifach getroffen. Wäre nun R eine Spitze, so könnte man aus den Punkten des Teilintervalles $|P_1R|$ von $|P_1Q_1|$ im Punkte P_1 die konvexe, im Punkte R aber die konkave Seite der Kurve K erreichen. Die Kurve K müsste also von p_1 auch im Punkte R berührt werden, dann wäre aber $|P_1R|$ eine Doppelstrecke für die Kurve K.

Der Punkt Q kann ausserhalb des entsprechenden Punktes P mit keinem anderen Punkte der Kurve zusammenfallen. Fiele nämlich Q mit einem von P abweichenden Punkte der Kurve K zusammen, so wäre das betreffende Intervall $|PQ|$ eine Doppelstrecke der Kurve K, weil man aus den Punkten dieses Intervalles in Q die konvexe Seite der Kurve erreichen kann. Der Punkt Q kann also nur dann in eine Spitze fallen, wenn er mit dem entsprechenden Punkte P zusammenfällt.

Die Punkte P und Q laufen auf der Kurve K in entgegengesetzten Sinnen, weil sie in der Nähe der Spitze B entgegengesetzte Bewegungssinne haben. Änderte nämlich der Punkt Q in Q' seinen Bewegungssinn, so wäre die Tangente $P'Q'$ — gegen unsere Annahme — eine Wendetangente der Kurve K.

Hat also eine Kurve K vom Maximal-Klassenindex keine Doppelstrecke, so kann man jedem Punkte P der Kurve einen bestimmten Punkt Q zuordnen. Die Punkte P und Q haben entgegengesetzte Bewegungssinne und treffen mit einander in Spitzen der Kurve K zusammen. Bewegt sich der Punkt P auf dem Bogen AB von A ausgehend bis zum Punkte B, so gelangt derjenige Punkt Q, welcher im Punkte A mit P zusammenfällt, von A bis zum Punkte M auf einem Bogen AM, von dem keine Spitze im Innern enthalten ist. Läuft nun der Punkt P den Bogen BC von C ausgehend hindurch, so beschreibt derjenige Punkt Q, der in der Spitze C mit P zusammenfällt, den Bogen CM' ohne Spitze.

Man kann nur aus dem einen der zwei Intervalle, die auf der Tangente der Spitze B von den Punkten B und M bestimmt werden, im Punkte B die konvexe Seite der Kurve erreichen. Die Punkte B und M bestimmen also eindeutig das entsprechende Intervall $|PQ|$. Dasgleiche gilt für das von B und M' bestimmte Intervall $|PQ|$. Die Intervalle $|BM|$ und $|BM'|$ müssen also zuzammenfallen, weil sie gemeinsame Punkte haben und weil keines von ihnen Punkte der Kurve K im Innern enthalten kann. Daraus folgt, dass der Bogen CA, von dem die Spitze B nicht enthalten ist, überhaupt keine Spitze hat. Die Kurve K hat also genau 3 Spitzen.

Jede Tangente irgendeines der Bögen AB, BC und CA trifft die anderen zwei Bögen in je einem Punkte. Wäre nämlich der Bogen AB von einer Tangente p des Bogens BC ausserhalb des Punktes Q, der in B mit dem Punkte P zusammenfällt, noch getroffen und wäre R der, nach dem Punkte Q, erste Schnittpunkt des Bogens AB mit p, so hätten die Punkte Q und R entgegengesetzte Bewegungssinne. Die Tangenten p und p_1 des Bogens BC in den benachbarten Punkten P und P_1 schneiden nämlich in der Nähe der Punkte P und P_1 einander. Daraus folgt, dass die Punkte Q_1 und R_1, in denen der Bogen AB von p_1 geschnitten wird, beide entweder innerhalb, oder beide ausserhalb des Teilbogens QR von AB liegen. Die Punkte Q und R müssten also einmal auf dem Bogen AB zusammenfallen, weil der Punkt R seinen Bewegungssinn nicht verändern kann. Dies ist aber für die Kurve K unmöglich.

Man kann aus dem Punkte A keine Tangente an den Bogen BC und ausser der Spitzentangente in A keine weitere Tangente an die Bögen AB und AC ziehen. Dies folgt aus den bewiesenen Lagenbeziehungen zwischen den Punkten P und Q. Die Kurve K

ist also dritter Klasse, weil man aus A an sie nur die Spitzentangente ziehen kann, die aus A eine dreifach zu rechnende Tangente ist.

Für eine Kurve n-ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die r Spitzen, d Doppeltangenten, (unter denen eine auch eine Wendetangente sein kann), und das Geschlecht p hat, gelten die Gleichungen[5]:

$$r = n - 2 + 2p \text{ und } d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p.$$

Eine Kurve K, die wenigstens 3 Spitzen hat, hat genau 3 Spitzen und ist von dritter Klasse. Sie hat also keine Doppeltangente.

Auch für die Kurven K vom Maximal-Klassenindex, die höchstens 2 Spitzen, aber keine Doppelstrecke haben, gelten die bewiesenen folgenden Behauptungen:

Wird die Kurve K von einem Punkte P aus der Spitze A ausgehend durchlaufen und ist Q derjenige von der Tangente des Punktes P aus K ausgeschnittene Punkt, der in der Spitze A mit P zusammenfällt, so haben die Punkte P und Q entgegengesetzte Bewegungssinne und treffen erst in einer von A abweichenden Spitze B mit einander zusammen. Bezeichnet γ_1 bzw. γ_2 den inzwischen von P bzw. Q durchlaufenen Bogen der Kurve K, dessen Endpunkte A und B sind, so wird der Bogen γ_2, der keine Spitze hat, von jeder Tangente des Bogens γ_1 in einem Punkte getroffen.

Daraus folgt, dass die Kurve K wenigstens 2 Spitzen hat. Sie kann aber auch zwei Spitzen nicht haben. Hätte sie nämlich nur die Spitzen A und B, so wäre jeder der Bögen γ_1 und γ_2 von einer Tangente des anderen Bogens in einem Punkte getroffen und so wären die Bögen γ_1 und γ_2 von den Spitzentangenten ausserhalb der Spitzen nicht getroffen. Dies ist aber unmöglich, weil die Kurve K eine paare Kurve ist.

Eine einzügige Kurve vom Maximal-Klassenindex ohne Wendetangente hat also nur dann keine Doppelstrecke, wenn sie dritter Klasse ist und 3 Spitzen hat oder wenn sie überhaupt keine Spitzen hat. In diesem letzten Falle ist die Kurve K von zweiter Ordnung. Dies folgt aus den Gleichungen

$$r = n - 2 + 2p \text{ und } d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p,$$

weil das Geschlecht einer einzügigen Kurve vom Maximal-Klassen-

[5]) S. die Fussnote [3]).

index 0 oder 1 ist. In diesen zwei Fällen und nur in diesen haben die Kurven auch keine Doppeltangente.

Es sei nun K' eine einzügige Kurve vom Maximal-Klassenindex mit einer Wendetangente und ohne Doppelstrecken. Die Wendetangente kann die Kurve K' ausserhalb des Wendepunktes nicht schneiden, weil sie vom Maximal-Klassenindex ist. Sie kann aber K' auch nicht berühren. Widrigenfalls gäbe es nämlich auf der Wendetangente wenigstens eine Doppelstrecke.

Sind $A, B, C, \ldots$ die Aufeinanderfolge des Wendepunktes A und der Spitzen $B, C, \ldots$ auf der Kurve und geht der Punkt P auf dem Bogen AB ohne Spitze von B ausgehend bis zum Wendepunkte A, so gelangt derjenige Punkt der Kurve, der in B mit P zusammenfällt bis zum Punkte A. Inzwischen — auf Grund der Vorigen — kann der Punkt Q durch keine Spitze hindurchgehen und kann seinen Bewegungssinn nicht verändern, weil die Kurve K' von der Wendetangente ausserhalb A nicht getroffen wird.

Hat also die Kurve K' keine Doppelstrecke, so hat sie nur eine Spitze (im Punkte B). In diesem Falle ist K' von dritter Klasse und hat keine eigentliche Doppeltangente, wie es aus den Gleichungen

$$r = n - 2 + 2p \text{ und } d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p,$$

folgt. Jede andere einzügige Kurve vom Maximal-Klassenindex mit Wendetangente hat eigentliche Doppeltangenten.

Damit ist unser Satz für einzügige Kurven vom Maximal-Klassenindex vollständig bewiesen.

3. Über die irreduziblen Kurven vom Maximal-Klassenindex.

Hat eine irreduzible Kurve C n-ter Klasse vom Maximal-Klassenindex k Züge: $C_1, C_2, \ldots, C_k$, so wird ihre Ebene durch diese k Züge und durch die eventuelle Wendetangente der Kurve in $k+1$ Gebiete $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_k$ zerteilt. Das Gebiet T_0, aus dessen Punkten $n-2$ Tangenten an die Kurve gehen, wird von den sämtlichen Zügen und von der eventuellen Wendetangente begrenzt. Die Grenze des Gebietes T_h $(h = 1, 2, \ldots, k)$ besteht aus dem Zuge C_h und aus der eventuellen Wendetangente dieses Zuges C_h.

Wäre nämlich das Gebiet T_h $(h > 0)$ von zwei Zügen der Kurve C begrenzt, so wären die Punkte des Gebietes T_0, die auf den konkaven Seiten der betreffenden zwei Zügen liegen, durch das Gebiet T_h voneinander getrennt. Das Gebiet T_0 wäre also nicht zusammenhängend und die Kurve C wäre also reduzibel.[6])

Jeder Zug einer Kurve vom Maximal-Klassenindex ist wieder eine Kurve vom Maximal-Klassenindex. Die Doppelstrecken der Züge einer Kurve C vom Maximal Klassenindex werden Doppelstrecken der Kurve C genannt.

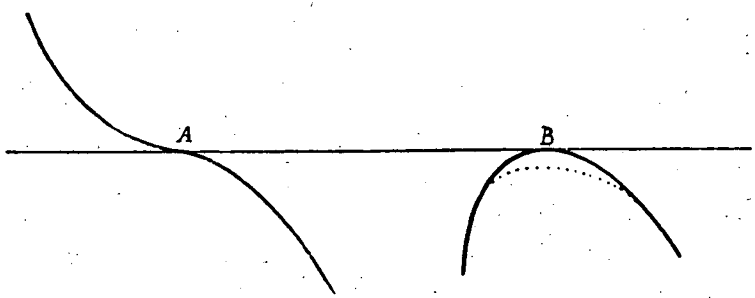
Die Doppelstrecken des Zuges C_h liegen im Innern oder an der Grenze des Gebietes T_h, aus dessen Punkten die maximale Anzahl der Tangenten an C_h und zugleich an C kann. Daraus folgen die Sätze:

Die Doppelstrecken einer irreduziblen Kurve vom Maximal-Klassenindex werden von der Kurve und von ihrer eventuellen Wendetangente nicht geschnitten.

Aus jedem Punkte einer Doppelstrecke, die zu einer irreduziblen Kurve vom Maximal-Klassenindex gehört, gehen n Tangenten an die Kurve.

Zwei Doppelstrecken einer irreduziblen Kurve vom Maximal-Klassenindex können einander nur dann schneiden, wenn sie zugleich Doppelstrecken eines und desselben Zuges der Kurve sind.

Der Einfachkeit halber nehmen wir im Folgenden an, dass die Kurve C vom Maximal-Klassenindex mit der Wendetangente a ausserhalb des Wendepunktes A von a nicht berührt wird. Ist nämlich die endliche Strecke AB eine Doppelstrecke der Kurve C, so hat die Kurve in der Nähe der Punkte A und B die Form der



Figur. Wäre nämlich der genug kleine den Punkt B enthaltende Elementarbogen B_1B_2 auf der anderen Seite der Wendetangente a gelegen, so könnte man von der konvexen Seite der Kurve

[6]) Math. Ann. Bd. 89 (1923), S. 63—64.

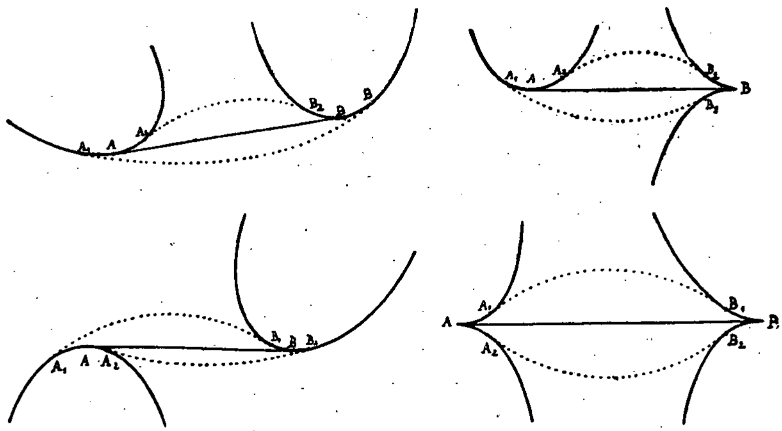
die konkave erreichen, ohne die Kurve oder ihre Wendetangente überschreiten zu müssen.

Ersetzen wir den Elementarbogen B_1B_2 mit dem punktierten Elementarbogen B_1B_2, so erhalten wir eine Kurve C' vom Maximal-Klassenindex, für welche die Klasse, der Klassenindex und die Anzahl der Singularitäten dieselben sind, wie für die Kurve C. Diese Kurve C' hat mit a um Eins weniger Berührungspunkte, als die Kurve C. Damit ist die Berechtigung der Annahme nachgewiesen.

Liegt eine Doppelstrecke s mit den Endpunkten A und B im Gebiete T_h und schliesst man sie der irreduziblen Kurve C vom Maximal-Klassenindex doppelt bei, so kann man sie die zwei Ufer eines unendlich schmalen Querschnittes q im Gebiete T_h betrachten. Dieser Querschnitt q ist für das Gebiet T_0, aus dessen Punkten $n-2$ Tangenten an die Kurve C gezogen werden können, eine Brücke, von der die Punkte A und B des Randes C_h verbunden werden. Diese Brücke vermehrt den Zusammenhang des Gebietes T_0 um Eins.

Das ebene Gebiet T_h ist einfach oder zweifach zusammenhängend, weil es von einem Rande begrenzt wird. Das Gebiet T_h wird also durch den Querschnitt q entweder in zwei einfach zusammenhängende Gebiete zerteilt oder in ein einfach zusammenhängendes Gebiet verwandelt. Demgemäss wird der Zug C_h entweder in zwei Pseudozüge zerteilt oder in einen Pseudozug verwandelt. Diese Pseudozüge sind uneigentliche Kurven, weil sie eine gerade Strecke s haben.

Die uneigentliche Kurve $\bar{C}$, in welche die Kurve C durch den Querschnitt q verwandelt wird, lässt sich durch stetige Deformation in eine eigentliche Kurve C' vom Maximal-Klassenindex überführen. Sind A und B die Endpunkte der endlichen Strecke s, so ersetzen wir diese Strecke und die dieser Strecke anschliessenden genug kleinen Elementarbögen der Kurve AA_1 und BB_1 bzw. AA_2 und BB_2 durch einen Elementarbogen A_1B_1 bzw. A_2B_2. Diese Elementarbögen liegen in dem längs des Querschnittes q zerschnittenen Gebiete T_h, schmiegen sich an die Ufer des Querschnittes q eng genug an, haben mit einander und mit der eventuellen Wendetangente keinen gemeinsamen Punkt, mit der Kurve C ausserhalb der Punkte A_1 und B_1 bzw. A_2 und B_2, wo sie die Kurve C berühren, keinen weiteren gemeinsamen Punkt. Die folgenden vier



Figuren zeigen hinreichend deutlich die möglichen Formen der Kurven $\overline{C}$ und C' in der Nähe der Doppelstrecke AB. Die Elementarbögen A_1B_1 und A_2B_2 sind in den Figuren punktierte Linien.

Die Kurve C' ist vom Maximal-Klassenindex, weil man aus einem Punkte der Ebene entweder die konvexen oder die konkaven Seiten der Elementarbögen, (von denen die Kurve zusammengesetzt ist), erreichen kann, ohne die Kurve oder ihre eventuelle Wendetangente zu überschreiten. Die Kurven C und C' haben dieselben auf der Doppelstrecke senkrecht stehenden Tangenten; daraus folgt, dass ihre Klassen übereinstimmen.

Das Gebiet T'_0, aus dessen Punkten an die Kurve C' $n-2$ Tangenten gehen, ist zusammenhängend und ensteht aus T_0 durch die Anwendung einer Brücke. Daraus folgt, dass die Kurve C' irreduzibel und vom Geschlechte $p+1$ ist, wenn p das Geschlecht der Kurve C ist. Hat die Kurve C bzw. C' r bzw. r' Spitzen, so ist $r'=r+2$.

Das Verfahren, wodurch eine Doppelstrecke der Kurve C aufgehoben wurde, lässt sich auch auf die Kurve C' anwenden, wenn sie Doppelstrecken hat. Durch μ-malige Anwendung dieses Verfahrens geht die Kurve C vom Geschlechte p in eine irreduzible Kurve $C^{(\mu)}$ n ter Klasse vom Maximal-Klassenindex und vom Geschlechte $p+\mu$ über. Hat nun die Kurve $C^{(\mu)}$ keine Doppelstrecke, so besteht sie aus Zügen dritter Klasse und aus Ovalen. Für eine irreduzible Kurve n-ter Ordnung vom Maximal-Klassenindex ist die Summe der Klassenindizes $n-2$ ist.[7]) Daraus folgt, dass die

[7]) Vgl. Math. Ann. Bd. 89 (1923), S. 66.

Kurve $C^{(\mu)}$ $n-2$ Züge dritter Klasse mit je drei Spitzen hat. Sie kann noch ein oder kein Oval haben.[8])

Das Gebiet $T_0^{(\mu)}$ ensteht also, wenn man entweder aus der ganzen Ebene oder aus dem Inneren eines Ovales die $n-2$ von den Zügen dritter Klasse begrenzten einfach zusammenhängenden Gebiete entfernt. Dieses Gebiet $T_0^{(\mu)}$ ist $n-1$-fach zusammenhängend. Das Geschlecht der Kurve $C^{(\mu)}$ ist also $n-2$. Daraus folgt, dass $\mu = n-2-p$ ist.

Damit ist der Duale des in der Einleitung für irreduzible Kurven vom Maximalindex ausgesprochenen Satzes vollständig bewiesen. Aus dem Beweise folgt auch der Satz:

Eine irreduzible Kurve n-ter Klasse vom Maximal-Klassenindex und vom Geschlechte p hat wenigstens $n-2-p$ Doppelstrecken.

4. Über die irreduziblen Kurven vom Maximalindex.

Ist C_h ein Zug n_h-ter Ordnung einer irreduziblen Kurve C n-ter Ordnung vom Maximalindex, so begrenzen die zwei Tangenten eines seiner Doppelpunkte zwei Winkelräume. Wird der Zug C_h von jeder Geraden des einen Winkelraumes in n_h Punkten getroffen, so wird dieser Winkelraum ein *Doppelwinkel des Zuges* C_h und zugleich *ein Doppelwinkel der Kurve* C genannt. Diese Definition lässt sich auch auf den Fall mehrfacher Punkte ausdehnen.

Auf Grund der Vorigen mit Hilfe des Dualitätsprinzips ausser dem in der Einleitung ausgesprochenen Satze folgen auch die Sätze:

Hat eine irreduzible Kurve vom Maximalindex wenigstens einen Doppelpunkt, so hat sie wenigstens einen Doppelwinkel.

Eine irreduzible Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlechte p hat wenigstens $n-2-p$ Doppelwinkel.

Die irreduzible Kurve C n-ter Ordnung vom Maximalindex wird von jeder Geraden, die in einen Doppelwinkel fallen, in n Punkten getroffen.

Ist g eine Gerade, die in zwei Doppelwinkeln liegt, so gehören diese Doppelwinkel zu zwei Doppelpunkten eines und desselben Zuges.

(Eingegangen am 31. XII. 1926.)

---

[8]) Vgl. Math. Ann. Bd. 89 (1923), S. 52.